Rechenbeispiel 1: Rechtsseitiger Test

Eine Kleinstadt will ein neues Kulturzentrum erbauen. Der Bürgermeister geht davon aus, dass höchstens 50% der Einwohner dem Vorhaben zustimmen. Einige Kunst- und Kulturexperten vermuten dagegen, dass die Zustimmungsrate höher ist.

Bei einer Umfrage unter 200 Personen befürworten 120 Personen den Bau des Kulturzentrums.

Kann man nun bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4% davon ausgehen, dass die Annahme des Bürgermeisters korrekt ist?

Lösung Rechenbeispiel 1

Da man bei der Stichprobe nur zwischen „Treffer“ (=Zustimmung) oder „kein Treffer“ (= Ablehnung) unterscheidet, handelt es sich um ein Zufallsexperiment mit Binomial-verteilung. Der Umfang der Stichprobe ist $n = 200$.

Der Bürgermeister vermutet eine Trefferwahrscheinlichkeit von $p \leq 0{,}5$. Damit ist H_0 mit $p \leq 0{,}5$ die Nullhypothese. Die Alternative ist H_1 mit $p > 0{,}5$.

Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der Treffer beschreibt, ist gemäß H_0 $B_{200;0,5}$-verteilt.

Wenn sich nun herausstellt, dass die Anzahl der Treffer T höher ist als erwartet, so wird H_0 zugunsten von H_1 abgelehnt.

Lösung Rechenbeispiel 1

Es handelt sich demnach um einen rechtsseitigen Test und es muss ein Ablehnungsbereich der Form $\mathrm{A} = [k, \dots, 200]$ gefunden werden.

Mit Hilfe der Irrtumswahrscheinlichkeit lässt sich k bestimmen. Damit H_0 abgelehnt wird, muss $P(X \geq k) < 0{,}04$ gelten.

Da der GTR keine Funktion für $P(X \geq k)$ kennt, müssen wir dies zu $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$ umformen.

Somit gibt man im Y-Editor den Ausdruck `1-binomcdf(200,0.5,X-1)` und sucht sich über `2ND TABLE` den Wert von X, beim dem dieser Ausdruck erstmals $< 0{,}04$ wird.

Lösung Rechenbeispiel 1

Für $X = 112$ stellt man $\alpha = 0{,}05182$ und $X = 113$ stellt man $\alpha = 0{,}03842$ fest. Somit ist $k = 113$ der gesuchte Wert für das Ablehnungsintervall.

X	Y1	
111	.06868	
112	.05182	
113	.03842	
114	.02798	
115	.02002	
116	.01406	
117	.0097	

X=113

Das Ablehnungsintervall lautet also $A = [113, \ldots, 200]$.

Da bei der Stichprobe eine Trefferzahl T von 120 (d.h. 120 Zustimmungen) festgestellt wurden und $T \in \mathrm{A}$ ist, wird H_0 abgelehnt.

Ergebnis: Die Kunst- und Kulturexperten haben bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 4% Recht (d.h. H_1 gilt) und die Zustimmungsrate für das Kulturzentrum liegt über 50%.

Rechenbeispiel 2: Linksseitiger Test

In einem Supermarkt hatte das Fertiggericht „Maxi Lunch“ bisher einen Marktanteil von höchstens 30%.

Nach einer Untersuchung von Stiftung Warentest erhielt „Maxi Lunch“ die Note 1.

Eine Woche nach dem Testbericht stellt der Marktleiter fest, dass von 240 Käufern von Fertiggerichten 60 „Maxi Lunch“ gekauft haben.

Kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% davon ausgehen, dass der Marktanteil von „Maxi Lunch“ gestiegen ist?

Lösung Rechenbeispiel 2

Hier bedeutet „Treffer“ = „gekauft“ und „kein Treffer“ = „nicht gekauft“. Der Umfang der Stichprobe ist $n = 240$.

Was ist nun die Nullhypothese?

Üblicherweise, nimmt man das, was geprüft werden soll, bzw. das was behauptet wird als Nullhypothese.

Folglich ist H_0 mit $p > 0{,}3$ (also die Annahme, dass der Marktanteil gestiegen ist und nun über 30% liegt) unsere Nullhypothese.

Die Alternative ist H_1 mit $p \leq 0{,}3$.

Lösung Rechenbeispiel 2

Um welche Art von Test handelt es sich?

Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der Käufer beschreibt, ist gemäß H_0 $B_{240;0,3}$-verteilt.

Wenn sich nun herausstellt, dass die Anzahl der Käufer T kleiner ist als man Aufgrund der Annahme $p > 0,3$ erwarten würde, so wird H_0 zugunsten von H_1 abgelehnt, was bedeutet, dass der Marktanteil nach wie vor höchstens 30% beträgt.

Es handelt sich somit um einen linksseitigen Test und es muss ein Ablehnungsbereich der Form $\mathrm{A} = [0, \dots, k]$ gefunden werden.

Lösung Rechenbeispiel 2

Es gibt eine kleine Eselsbrücke, mit der man etwas einfacher herausfinden kann, um welche Art Test es sich handelt.

Die Art des Tests lässt sich nämlich direkt an der Gegenhypothese H_1 ablesen.

Steht dort $p \leq$ ... oder $p <$ ..., so handelt es sich um einen linksseitigen Test.

Haben wir $p \geq$ ... oder $p >$ ..., so liegt ein rechtsseitiger Test vor.

Lösung Rechenbeispiel 2

Mit Hilfe der Irrtumswahrscheinlichkeit lässt sich k bestimmen. Damit H_0 abgelehnt wird, muss $P(X \leq k) < 0{,}1$ gelten. Man gibt im Y-Editor den Ausdruck binomcdf(240,0.3,X) ein und sucht sich über 2ND TABLE den Wert von X, beim dem dieser Ausdruck erstmals $< 0{,}1$ wird.

Für $X = 62$ stellt man $\alpha = 0{,}08909$ und $X = 63$ stellt man $\alpha = 0{,}11471$ fest.

Somit ist $k = 62$ der gesuchte Wert für das Ablehnungsintervall.

Lösung Rechenbeispiel 2

Das Ablehnungsintervall lautet also $A = [0, \dots, 62]$.

Da bei der Stichprobe eine Trefferzahl T von 60 (Käufer) festgestellt wurde und $T \in A$ ist, wird H_0 abgelehnt.

Ergebnis:

Der Marktanteil von „Maxi Lunch“ liegt nach dem Testbericht von Stiftung Warentest mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% nach wie vor höchstens bei 30%.

Rechenbeispiel 3

Leo ist Mitglied eines Schützenvereins und hat eine Trefferquote von höchstens 70%.

Nach einem mentalen Training nimmt Leo an, dass sich seine Trefferquote verbessert hat und testet dies auf dem Schießstand mit 100 Schuss.

Wie viele Treffer muss Leo mindestens erzielen, damit man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% davon ausgehen kann, dass sich seine Trefferquote wirklich verbessert hat?

Lösung Rechenbeispiel 3

Der Umfang der Stichprobe ist $n = 100$.

Wir nehmen wieder das, was wir prüfen wollen als Nullhypothese, d.h. $H_0\ p > 0{,}7$.

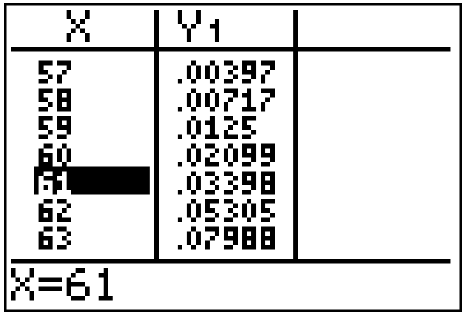
H_1 mit $p \leq 0{,}7$ ist die Gegenhypothese, d.h. wir haben einen linksseitigen Test und das Ablehnungsintervall hat die Gestalt $A = [0, \dots, k]$.

Für „Ablehnung“ muss $P(X \leq k) \leq 0{,}05$ gelten.

Im GTR gibt man den Ausdruck `binomcdf(100,0.7,X)` ein und prüft über `2ND TABLE`, wann dieser Wert erstmals 0,05 unterschreitet.

Lösung Rechenbeispiel 3

Für $X = 62$ erhält man noch $\alpha = 0{,}05305$ und $X = 61$ liefert $\alpha = 0{,}03398$.
Somit ist $k = 61$ der gesuchte Wert für das Ablehnungsintervall und wir haben
$A = [0, \dots, 61]$.



Ergebnis:

Leo muss mindestens 62 Treffer erzielen, damit man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% davon ausgehen kann, dass sich seine Trefferquote verbessert hat.

Rechenbeispiel 4

Ein Hersteller von Speicherchips gibt an, dass erfahrungsgemäß höchstens 7% der Chips fehlerhaft sind.

Nach einer baulichen Änderung in den Produktionsräumen des Herstellers vermutet ein Kunde, dass sich die Fehlerrate vergrößert hat.

Der Kunde und der Hersteller vereinbaren einen Test, bei dem 210 Chips geprüft werden.

Die Nullhypothese H_0 mit $p \leq 0{,}07$ wird abgelehnt, wenn dabei mehr als 23 Chips fehlerhaft sind.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man sich und lehnt somit H_0 zu unrecht ab?

Lösung Rechenbeispiel 4

Wir haben $n = 210$. H_0 besagt $p \leq 0{,}07$. H_1 besagt $p > 0{,}07$.

Die Zufallsvariable X, ist gemäß H_0 $B_{210;0,07}$-verteilt.

Das Ablehnungsintervall ist mit $A = [24, \ldots, 210]$ vorgegeben.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist gegeben durch $P(X \geq 24) = 1 - P(X \leq 23)$. Über die Eingabe von 1-binomcdf(210,0.07,23) im GTR erhält man $\alpha \approx 0{,}0126$.

Ergebnis:

Wenn man mehr als 23 fehlerhafte Chips in der Stichprobe findet und daher H_0 ablehnt, so irrt man sich mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $1{,}26\%$.